

حل تمرین ۱۸ - صفحه پنجم درس نسبت

الف) اگر معادلات خطی نباشند فرض محتملی نقض می‌شود. مثلاً فرض کنید x به مربع x بستگی داشته باشد، یعنی به صورت $x^2 = a_{11}x$ باشد. در این صورت فاصله بین دو نقطه در چارچوب پیرام دار به وسیله رابطه

$$x_2^2 - x_1^2 = a_{11}(x_2^2 - x_1^2)$$

به مکان‌های این دو نقطه در چارچوب بدون پیرام مربوط خواهد شد. حال میله‌ای به طول واحد در t را در نظر بگیرید.

که نقاط انتهایی آن در $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ باشند، بنابراین $x_2 - x_1 = 3a_{11}$ ولی اگر نقاط انتهایی

همین میله در $x_1 = 4$ و $x_2 = 5$ باشند خواهیم داشت $x_2 - x_1 = 9a_{11}$ یعنی اندازه طول میله بستگی

به مکان آن در فضا خواهد داشت. به همین طریق در توان هر نوع بستگی غیر خطی به t وارد کرد زیرا بازه زمانی دو رویداد

نباید بستگی به اعدادی داشته باشد که عقربه‌های ساعت ناظر روی آنها میزان شده اند، بنابراین برای اینکه مبدأ

مختصات فضا-زمانی (یا هر نقطه دیگر) نسبت به تمام نقاط دیگر رجحان نداشته باشد باید این روابط خطی باشند.

ب) زیرا در $t = t = 0$ ، مبدأهای 0 ، 0 باید برهم منطبق باشند یعنی در این زمان از $x = y = z = 0$ باید

$$\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$$

پ) از آن‌جا که برای $y = 0$ و $z = 0$ همواره باید داشته باشیم $\dot{y} = 0$ و $\dot{z} = 0$ پس معادلات تبدیل برای y

و z باید به شکل $\dot{z} = a_{32}y + a_{33}z$ و $\dot{y} = a_{22}y + a_{23}z$ باشند. (اگر \dot{z} یا \dot{y} به t وابسته باشند

به وضوح شرط فوق ارضا نمی‌شود.) در نتیجه ضرایب a_{21} ، a_{24} ، a_{31} و a_{34} بایستی صفر باشند.

از آن‌جا که برای $z = 0$ همواره باید داشته باشیم $\dot{z} = 0$ و هم چنین برای $y = 0$ باید به دست آید $\dot{y} = 0$

$$\text{پس } a_{23} \text{ و } a_{32} \text{ صفرند و خواهیم داشت } \dot{z} = a_{33}z \text{ و } \dot{y} = a_{22}y.$$

ت) از نظر ناظر K طول میله برابر است با a_{22} ، زیرا $\dot{y} = a_{22}x = a_{22}$.

وقتی میله در چارچوب ناظر پیرام دار ساکن است این ناظر باید همان طولی (طول واحد) را برای این میله اندازه

گیرد که ناظر بدون پیرام وقتی که میله نسبت به او ساکن است اندازه ۱ گیرد. در غیر این صورت عدم تعادلی بین چارچوبها

وجود خواهد داشت که با اصل اول نسبت در تضاد است. با وجود این، در این حالت، ناظر K طول

میله را برابر با $\frac{1}{a_{22}}$ اندازه خواهد گرفت (زیرا در اینجا داریم: $\dot{y} = (1/a_{22})y = (1/a_{22})x$)

اکنون به علت دو جانبه بودن این اندازه گیری طول، اولین اصل موضوع نسبت ایجاد می‌کند که این اندازه گیری‌ها

یکسان باشند، چون در غیر این صورت چارچوبها از نظر فزیک هم از خود خواهند بود. در نتیجه باید داشته باشیم

$$a_{22} = \frac{1}{a_{22}} \Rightarrow a_{22} = 1$$

ث) y و z بسگی ندارد زیرا در غیر این صورت ساعتی که در صفحه yz نسبت به محور x به طور متقارن قرار گرفته اند (مثلاً در $+y$ و $-y$ یا در $+z$ و $-z$) از نظر ناظر K با هم توافق نخواهند داشت و این مطلب با هم انگری فضا متناقض است، در نتیجه $a_{42} = a_{43} = 0$.

ج) انتظار داریم که $x' = a_{11}(x - vt)$ معادله تبدیل درستی باشد زیرا در این معادله از $x = vt$ نتیجه می شود $x' = 0$. بنابراین خواهیم داشت:

$$x' = a_{11}x - a_{11}vt = a_{11}x + a_{14}t$$

از این رابطه نتیجه می شود: $a_{14} = -va_{11}$.

ج) اگر معادلات تبدیل (*) را در معادله (***) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a_{11}^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2$$

که پس از مرتب کردن جمله ها خواهیم داشت

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(va_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44})xt = (c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2)t^2$$

برای اینکه این معادله با (*) مطابقت داشته باشد باید داشته باشیم:

$$\underline{1} \quad c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 = c^2$$

$$\underline{2} \quad a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1$$

$$\underline{3} \quad va_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} = 0$$

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \xrightarrow{xv} \left. \begin{aligned} va_{11}^2 - c^2 va_{41}^2 &= v \\ va_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 a_{41} (a_{44} + va_{41}) = -v \quad (*)$$

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \xrightarrow{xv^2} \left. \begin{aligned} v^2 a_{11}^2 - c^2 v^2 a_{41}^2 &= v^2 \\ va_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_{44} + va_{41} = \frac{1}{a_{44}} \quad (**)$$

$$\xrightarrow{(*), (**)} c^2 a_{41} \left(\frac{1}{a_{44}} \right) = -v \Rightarrow \boxed{a_{41} = -\frac{v}{c} a_{44}} \quad (I)$$

$$a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \xrightarrow{xv^2} \left. \begin{aligned} v^2 a_{11}^2 - c^2 v^2 a_{41}^2 &= v^2 \\ c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2 &= c^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 a_{44}^2 - c^2 v^2 a_{41}^2 = v^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{c^2}{a_{44}^2} - v^2 a_{41}^2 = 1 + \frac{v^2}{c^2}} \quad (II)$$

