باسمه تعالی

تمرین‌های هفتهٔ پنجم درس نسبیت

مهلت تحویل: ۱۵/فروردین/۱۳۹۵

نمرهٔ تمرین‌ها بر اساس نوع نگاه شما به مسئله و چگونگی حل آن متغیر خواهد بود. کم‌ترین نمره به پاسخ‌های اصطلاحاً Copy-paste ای اختصاص می‌یابد!

۱- فرض کنید رویدادی را در چارچوب مرجع لخت S مشاهده می‌کنیم و مکان و زمانِ آن را با تعیین مختصات x، y، z و t مشخص می‌کنیم. در یک چارچوب لخت دیگر S' ، همین رویداد با مختصات فضا-زمانیِ x'، y'، z' و t' مشخص می‌شود. هدف این تمرین یافتن روابط تابعی $x' = x'(x,y,z,t)$، $y' = y'(x,y,z,t)$، $z' = z'(x,y,z,t)$ و $t' = t'(x,y,z,t)$ است، یعنی معادلات تبدیلی را می‌خواهیم که مختصات فضا-زمانی یک رویداد برای یک ناظر را به مختصات فضا-زمانی همین رویداد برای ناظر دیگر ارتباط دهند. برای این کار از اصول موضوع اساسی نسبیت و فرض همگنی و همسان‌گردی فضا-زمان استفاده می‌کنیم.

اصول نسبیت:

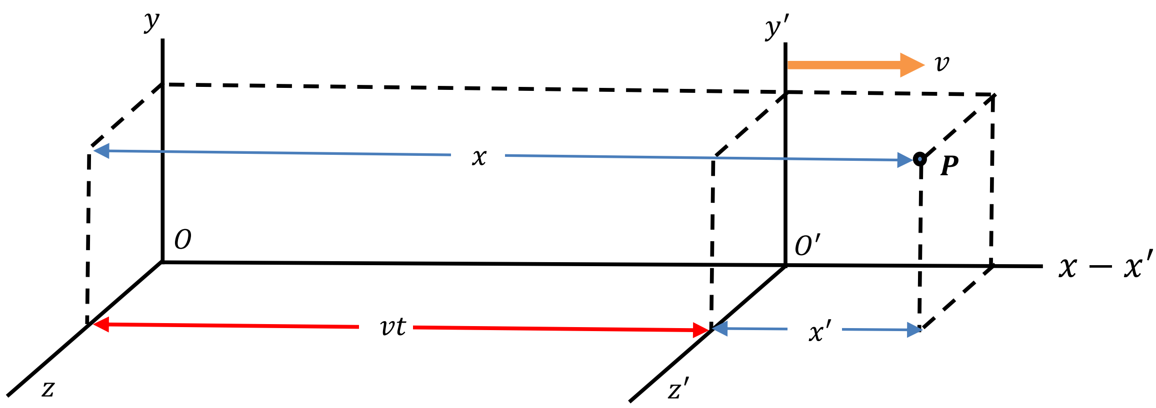
۱- هیچ دستگاهِ لختِ مرجحی وجود ندارد و قوانین فیزیک در تمام دستگاه‌های لخت یکسانند.

۲- سرعت نور در فضای تهی در تمامِ دستگاه‌های لخت یکی است.

تعریف: اگر تمامِ نقاط یک فضا-زمان هم‌ارز باشند می‌گوییم آن فضا-زمان **همگن** است. اگر خواص فضایی در تمامِ جهاتِ آن یکسان باشد می‌گوییم **همسان‌گرد** است.

فرض همگنی به معنی آن است که مثلاً نتایج اندازه‌گیری بازهٔ مکانی یا بازهٔ زمانیِ دو رویدادِ مشخص نباید بستگی به این داشته باشد که این بازه در چه مکان یا زمانی از چارچوب مرجع ما قرار دارد.

برای ساده کردن محاسبات، می‌توانیم سرعت نسبی چارچوب‌های S و S' را در امتدادِ محور مشترک $x - x'$ در نظر بگیریم و فرض می‌کنیم صفحات متناظر موازی باشند (شکل زیر را ببینید.) دقت کنید که این فرض هیچ محدودیتی در نتایج ایجاد نمی‌کند زیرا فضا همسان‌گرد است یعنی خواص آن در تمامِ جهات یکسان است.



همچنین در لحظه‌ای که مبدأهای O و O' بر یکدیگر منطبق‌اند، ساعت‌ها را به ترتیب روی $t = 0$ و $t' = 0$ میزان می‌کنیم. حال، فرض همگنی ایجاب می‌کند که معادلات تبدیل خطی باشند، به عبارت دیگر فقط توان‌های اول متغیرها دخالت می‌کنند.

الف) با یک مثال نشان دهید اگر معادلات خطی نباشند فرض همگنی نقض می‌شود.

بنابراین عمومی‌ترین شکلی که این معادلات می‌توانند داشته باشند عبارت است از

$$\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \\
t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t
\end{aligned}$$

که در آن ضرایب با اندیس، ثابت‌هایی هستند که برای به دست آوردن فرم صحیح تبدیلات باید تعیین شوند.

ب) توضیح دهید چرا به هر کدام از معادلات فوق عدد ثابت متفاوتی اضافه نشده است؟ (انتخاب مبدأها را در نظر بگیرید.)

اکنون انتظار می‌رود مقادیر این ۱۶ ضریب به سرعت نسبی دو چارچوب لخت، v، بستگی داشته باشند. مثلاً اگر $v = 0$، انتظار داریم که $a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 1$ و بقیهٔ ضرایب صفر باشند. ما به دنبال یافتن ضرایبی هستیم که برای تمام مقادیر v صادق باشند، یعنی تابعی از v باشند.

پ) محور x دائماً بر محور x' منطبق است. این امر تنها در صورتی صادق است که برای $y = 0$ و $z = 0$ (که معرف نقاط واقع بر محور x است) همیشه داشته باشیم $y' = 0$ و $z' = 0$ (که معرف نقاط واقع بر محور x' است.) همچنین صفحات xy و xz باید به ترتیب بر $x'y'$ و $x'z'$ تبدیل شوند. از این گزاره استفاده کنید و به طور دقیق استدلال نمایید که چرا تمامی ضرایب a_{21}، a_{23}، a_{24}، a_{31}، a_{32}، a_{34} صفر هستند و خواهیم داشت

$$y' = a_{22}y \quad \text{و} \quad z' = a_{33}z$$

ضرایب باقی‌مانده، a_{22} و a_{33}، را می‌توان با استفاده از اصول موضوع نسبیت محاسبه کرد.

ت) میله‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد محور y قرار دارد و طولش از نظر ناظر S که نسبت به آن ساکن است برابر با ۱ است. از نظر ناظر S' طول این میله چقدر است؟

اکنون فرض کنید همین میله در امتداد y' از چارچوب S' قرار داشته و نسبت به آن ساکن باشد. از اصول نسبیت استفاده کنید و دلیل بیاورید که چرا S' باید همان طولی را برای این میله اندازه بگیرد که ناظر S، وقتی که میله نسبت به او ساکن است، اندازه می‌گیرد؟ در این حالت، ناظر S طول میله را چقدر اندازه‌گیری می‌کند؟

اکنون از اصل اول نسبیت استفاده کنید و استدلال کنید که چرا $a_{22} = 1$؟

به طور مشابه می‌توان نتیجه گرفت $a_{33}=1$. بنابراین دو معادلهٔ وسطی به صورت زیر در می‌آیند:

$$y'=y \quad \text{و} \quad z'=z$$

بنابراین تبدیلات مربوط به x' و t' باقی مانده است، یعنی

$$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$$
$$t'=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t$$

ث) از فرض همسان‌گردی فضا استفاده کنید و نتیجه بگیرید t' به y و z بستگی ندارد یعنی $t'=a_{41}x+a_{44}t$.

ج) می‌دانیم نقاطی که برای آن‌ها $x'=0$ است با سرعت v در جهت مثبت محور xها حرکت می‌کنند به طوری‌که گزارهٔ $x'=0$ باید با گزارهٔ $x=vt$ معادل باشد. با توجه به این توضیحات دلیل بیاورید که چرا $a_{12}=a_{13}=0$ و $a_{14}=-va_{11}$.

اکنون چهار معادلهٔ ما به صورت‌های سادهٔ زیر در می‌آیند:

$$x'=a_{11}(x-vt)$$
$$y'=y$$
$$z'=z$$
$$t'=a_{41}x+a_{44}t \qquad (*)$$

حالا مسئلهٔ تعیین ضرایب a_{11}، a_{41} و a_{44} باقی می‌ماند. برای انجام این کار از اصل ثابت بودن سرعت نور استفاده می‌کنیم. فرض کنید در لحظهٔ $t=0$ یک موج الکترومغناطیسی کروی مبدأ S را که در این لحظه بر مبدأ S' منطبق است ترک می‌کند. بنابر اصل دوم نسبیت این موج در هر چارچوب لختی با سرعت c در تمام جهات منشر می‌شود. بنابراین پیش‌روی این موج در هر دو دستگاه S و S' توسط معادلهٔ کره‌ای که شعاع آن بر حسب زمان با آهنگ c بزرگ می‌شود مشخص می‌گردد. یعنی:

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \qquad (**)$$

یا

$$x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2 \qquad (***)$$

چ) معادلات تبدیل (*) را در معادلهٔ (***) قرار دهید و آن را تا حد امکان ساده کنید. معادله‌ای که به دست می‌آورید باید با معادلهٔ (**) تطابق داشته باشد، ازمطابقت این دو استفاده کنید و سه معادله به دست آوردید.

ح) حال سه معادله و سه مجهول دارید. این معادلات را حل کرده و نتیجه بگیرید که

$$a_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$a_{11}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$a_{41}=\frac{-v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

خ) چگونه می‌توان حذف جواب‌های منفی برای a_{11} و a_{44} را توجیه کرد؟

با قرار دادن این مقادیر در معادلات (*) معادلات تبدیل موردنظر به صورت زیر به دست می‌آید که **معادلات تبدیل لورنتس** نامیده می‌شوند

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

د) با توجه به این معادلات نشان دهید اگر چارچوب‌های مرجع را عوض کنیم یا مختصات فضا-زمانی یک رویداد را به جای S در S' در نظر بگیریم، تنها تغییری که اصول نسبیت اجازه می‌دهد، تغییر سرعت نسبی از v به $-v$ است.

ذ) نشان دهید اگر v نسبت به c کوچک باشد این معادلات به معادلات تبدیل گالیله منجر می‌شوند.

ر) نشان دهید فاصلهٔ بین دو رویداد (t_1, x_1, y_1, z_1) و (t_2, x_2, y_2, z_2) که به صورت زیر تعریف می‌شود تحت تبدیلات لورنتس ناورداست، در نتیجه المان طول مینکوفسکی، $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ناورداست.

$$s^2 = -(t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

۲- هدف این تمرین اثبات ناوردایی معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتس است. بار الکتریکی در حال سکون میدان الکتریکی تولید می‌کند و نه میدان مغناطیسی. اما اگر همین بار الکتریکی توسط ناظری متحرک مشاهده شود هم میدان الکتریکی تولید می‌کند و هم میدان مغناطیسی. این نشان می‌دهد که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در چارچوب‌های متحرک تغییر خواهند کرد. وقتی می‌گوییم معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتس هموورداست باید ویژگی‌های تبدیل لورنتس را برای $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ و همچنین برای چگالی‌های بار و جریان، $\mathbf{j}$ و ρ بدانیم. تحت تبدیلات لورنتس نه تنها مختصات فضایی و زمانی، بلکه میدان‌های الکترومغناطیسی و چشمهٔ بار و جریان‌ها نیز تغییر می‌کنند. با این حال، ارتباط میان این مقادیر تغییریافته به گونه‌ای است که فرم معادلات ماکسول ناوردا می‌ماند. میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس به صورت زیر تغییر می‌کنند (اثبات این معادلات در تمرین‌های هفتهٔ بعد از شما خواسته می‌شود!)

$$E_1' = E_1, \quad E_2' = \gamma(E_2 - \beta B_3), \quad E_3' = \gamma(E_3 + \beta B_2)$$
$$B_1' = B_1, \quad B_2' = \gamma(B_2 + \beta E_3), \quad B_3' = \gamma(B_3 - \beta E_2)$$

همچنین تبدیلات چگالی‌های بار و جریان به صورت زیر است

$$j_1' = \gamma(j_1 - v\rho), \quad j_2' = j_2, \quad j_3' = j_3, \quad \rho' = \gamma(\rho - \frac{v}{c^2} j_1)$$

فرض کنید $\mathbf{L}$ نمایان‌گر تبدیلات لورنتس باشد در این صورت $x'^{\mu} = \sum_{\nu} \mathbf{L}^{\mu}_{\nu}\, x^{\nu}$. به دنبال تبدیلی مانند $\bar{\mathbf{L}}$ هستیم که چگونگی تغییرات مشتق‌های مختصاتی را به دست دهد

$$\partial'_{\mu} = \sum_{\nu} \bar{\mathbf{L}}^{\nu}_{\mu}\, \partial_{\nu}$$

که در آن $\partial_{\mu} = (\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

عملگرهای مشتق مختصاتی $(\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right))$ برعکسِ تبدیلات مربوط به مختصات (t, x_i) که در تمرین قبل به دست آوردید تبدیل می‌شوند ($v \to -v$)، یعنی

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z}$$

در واقع بر حسب ماتریس‌های تبدیل داریم $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}^{-1}$.

الف) نتیجهٔ فوق را با استفاده از قاعدهٔ زنجیری مشتق‌ها به دست آورید.

ب) نتیجهٔ فوق را با استفاده از این نکته که $\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = \delta^{\mu\nu}$ ناورداست به دست آوردید.

پ) با توجه به ملاحظات فوق نشان دهید فرم معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتس ناورداست.

موفق باشید. شجاعی