باسمه تعالی

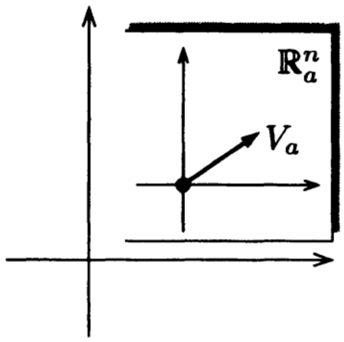
تمرین‌های هفتهٔ چهارم درس نسبیت

مهلت تحویل: ۱۶/اسفند/۱۳۹۴

نمرهٔ تمرین‌ها بر اساس نوع نگاه شما به مسئله و چگونگی حل آن متغیر خواهد بود. کم‌ترین نمره به پاسخ‌های اصطلاحاً Copy-paste ای اختصاص می‌یابد!

یکی از ابزارهای کلیدی در مطالعهٔ خمینه‌های هموار ایدهٔ «تقریب خطی» است. تقریب خطی مفهومی آشنا در فضاهای اقلیدسی است، جایی که برای مثال تابع یک متغیره را با خط مماس بر آن و رویه‌ای در $\mathbb{R}^3$ را با صفحه مماسش می‌توان تقریب زد. برای استفاده از این ابزار در خمینه‌های هموار ابتدا باید مفهوم «بردار» را به گونه‌ای طبیعی مجرد ساخت. همان‌طور که در جلسهٔ دوم این هفته بیان شد «بردار» و «مشتق» عملاً مفاهیمی «هم‌ارز» هستند که استفاده از هم‌ارزی آن‌ها در مطالعهٔ نسبیت نقش به سزایی ایفا می‌کند. هدف این تمرین آن است که شما «اثباتاً» (و نه «قلباً») به هم‌ارزی آن‌ها پی ببرید!

در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$، v_a را نماد بردار v با نقطهٔ ابتدایی a در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ تمام بردارهای v_a (یعنی بردارهای با نقطهٔ آغازین a) را با $\mathbb{R}^n_a$ نمایش می‌دهیم. (شکل زیر را ببینید)



الف) نشان دهید مجموعهٔ $\mathbb{R}^n_a$ با جمع و ضرب اسکالری که به صورت زیر تعریف می‌شود روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری تشکیل می‌دهد که در آن $v_a, w_a \in \mathbb{R}^n_a$، $c \in \mathbb{R}$ و $v, w \in \mathbb{R}^n$.

$$v_a + w_a := (v + w)_a$$
$$c(v_a) = (cv)_a$$

در واقع، فضای برداری $\mathbb{R}^n_a$ اساساً شبیه خودِ $\mathbb{R}^n$ است (به بیان تخصصی‌تر دو فضای برداری $\mathbb{R}^n_a$ و $\mathbb{R}^n$ یکریختند) تنها دلیل استفاده از اندیس a متذکر شدن این نکته است که اگر $a \neq b$ باشد، فضاهای $\mathbb{R}^n_a$ و $\mathbb{R}^n_b$ هیچ اشتراکی با هم ندارند و کاملاً مجزا هستند.

مشکل تعریف بردار بدین صورت این است که به ما سرنخی راجع به چگونگی تعریف بردار روی یک خمینهٔ دلخواه نمی‌دهد. در واقع اگر بخواهیم از این تعریف بردار استفاده کنیم همیشه باید فرض کنیم که خمینه در یک فضای اقلیدسی گنجانده شده است و این یعنی فرض کردن یک فضای پیش‌زمینه (background) که مسلماً مورد تأیید یک نظریهٔ خوب فیزیکی نیست.

نکته: در اینجا برای سهولت با $\mathbb{R}^3$ کار می‌کنیم اما تمامی گزاره‌ها برای $\mathbb{R}^n$ هم برقرار است.

همانطور که در کلاس ذکر شد بردار ابزاری برای گرفتن «مشتق جهتی» از توابع فراهم می‌کند، به ازای بردار $v_a \in \mathbb{R}^3_a$ ، نگاشت $D_v|_a: C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ از توابعِ هموار روی $\mathbb{R}^3$ در جهت v در نقطهٔ a مشتق می‌گیرد و یک عدد می‌دهد. ($C^\infty(\mathbb{R}^3)$ نماد تمام توابع هموار روی $\mathbb{R}^3$ است.) مشتق‌گیری در جهت v در نقطهٔ a یعنی مشتق‌گیری در راستای خط $c(t) = a + tv$ در زمان $t = 0$ ، بنابراین:

$$\boxed{D_v|_a(f) = (D_v f)(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\, f(a + tv)}$$

ب) نشان دهید نگاشت $D_v|_a$ خطی است.

پ) نشان دهید $D_v|_a$ قاعدهٔ لایب نیتس را ارضا می‌کند، یعنی

$$D_v|_a(fg) = f(a) D_v|_a(g) + g(a) D_v|_a(f)$$

فرض کنید $\{e_1|_a, e_2|_a, e_3|_a\}$ پایهٔ فضای $\mathbb{R}^3_a$ باشد به طوری که $e_1|_a = \hat{\imath}|_a$ ، $e_2|_a = \hat{\jmath}|_a$ و $e_3|_a = \hat{k}|_a$ ، که در آن $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ همان بردارهای پایهٔ یکه و متعامد آشنا برای $\mathbb{R}^3$ هستند.

ت) نشان دهید اگر $v_a = v^1\, e_1|_a + v^2\, e_2|_a + v^3\, e_3|_a$ نمایش بردار در پایهٔ فوق باشد آن‌گاه با استفاده از قاعدهٔ زنجیری و رابطهٔ داخل کادر بالا می‌توان نوشت:

$$D_v|_a(f) = v^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + v^2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + v^3 \frac{\partial f}{\partial z}(a)$$

ث) نشان دهید اگر $v_a = e_1|_a$ باشد آن‌گاه $D_v|_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

با داشتن این ساختار در ذهن تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

تعریف: اگر a نقطه‌ای از $\mathbb{R}^3$ باشد نگاشت خطی $X: C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ **مشتق (Derivation) در نقطهٔ a** نامیده می‌شود اگر قاعدهٔ لایب نیتس را ارضا کند، یعنی برای هر $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$X(fg) = f(a)\, X(g) + g(a)\, X(f)$$

همچنین $T_a(\mathbb{R}^3)$ نمایانگر مجموعهٔ تمام مشتق‌ها در نقطهٔ a است.

ج) با توجه به قسمت‌های قبلی این تمرین استدلال کنید که چرا می‌توان گفت مشتق جهتی با تعریف فوق «مشتق» است؟

چ) نشان دهید $T_a(\mathbb{R}^3)$ با جمع و ضرب اسکالری که به صورت زیر تعریف می‌شود روی میدان اعداد حقیقی یک فضای برداری تشکیل می‌دهد که در آن $X, Y \in T_a(\mathbb{R}^3)$ ، $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ و $c \in \mathbb{R}$

$$(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$$
$$(cX)(f) = c(X(f))$$

ح) فرض کنید $a \in \mathbb{R}^3$ و $X \in T_a(\mathbb{R}^3)$ باشد. نشان دهید برای تابع ثابت $f_1(x) := 1$ داریم $X(f_1) = 0$.

خ) با توجه به خطی بودن مشتق و حل قسمت (ح) نشان دهید برای هر تابع ثابت $f(x) = c$ داریم $X(f) = 0$.

استدلال قسمت (ج) نشان می‌دهد که هر مشتق جهتی یک مشتق است، اما آیا می‌توان گفت هر مشتق هم یک مشتق جهتی است؟ در قسمت بعد نشان می‌دهید که پاسخِ این سوال مثبت است.

د) فرض کنید $X \in T_a(\mathbb{R}^3)$ دلخواه باشد. تعریف می‌کنیم

$$v^1 := X(x)\,, v^2 := X(y)\ \,, v^3 := X(z)$$

و ادعا می‌کنیم که X در واقع مشتق جهتی در راستای بردار $v = v^1\, e_1 + v^2\, e_2 + v^3\, e_3$ است. برای اثبات این ادعا فرض کنید f تابعی هموار روی $\mathbb{R}^3$ باشد. «فرمول تیلور همراه با باقی‌مانده» بیان می‌کند که توابع هموار $g_1\,, g_2\,, g_3$ وجود دارند به طوری که $g_i(a) = 0$ که در آن $a = (a^1, a^2, a^3) \in \mathbb{R}^3$ و

$$f(x,y,z) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a^1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a^2) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(z - a^3) \\ + g_1(x,y,z)(x - a^1) + g_2(x,y,z)(y - a^2) + g_3(x,y,z)(z - a^3)$$

X را روی دو طرف تساوی فوق اثر دهید و با استفاده از ویژگی‌هایی که در قسمت‌های قبل این تمرین برای «مشتق» و «مشتق جهتی» به دست آوردید نتیجه بگیرید که $X(f) = D_v|_a(f)$.

حال آماده‌ایم تا نشان دهیم دو فضای برداری $\mathbb{R}^3_a$ و $T_a(\mathbb{R}^3)$ یکریختند. این یکریختی را نگاشت $F : \mathbb{R}^3_a \to T_a(\mathbb{R}^3)$ با ضابطهٔ $F(v_a) = D_v|_a$ تضمین می‌کند.

ذ) با استفاده از رابطهٔ قسمت (ت) نشان دهید نگاشت F خطی است. به بیان دیگر نشان دهید برای $v_a, w_a \in \mathbb{R}^3_a$ و $c \in \mathbb{R}$

$$F(v_a + w_a) = F(v_a) + F(w_a)$$

$$F(cv_a) = cF(v_a)$$

ر) نشان دهید F یک به یک است. برای این کار فرض کنید $F(v_a) = F(w_a)$. دو طرف این رابطه را روی توابع مختصاتی (یعنی x، y و z) اثر دهید، از رابطه‌ای که در قسمت (ت) به دست آوردید استفاده کنید و نتیجه بگیرید که $v_a = w_a$.

ز) توضیح دهید چرا برهان قسمت (د) در واقع همان اثبات پوشا بودن نگاشت F است؟

همان‌طور که از جلسات قبل آموختید نگاشت یکریختی بین دو فضای برداری، نگاشتی دوسویه و خطی است. در واقع شما با حل قسمت‌های (ذ)، (ر) و (ز) نشان دادید که F یکریختی است.

جان کلام: دو فضای برداری $\mathbb{R}^3_a$ و $T_a(\mathbb{R}^3)$ اساساً یکریخت هستند. پس از حلِ این تمرین می‌توانید بدون نگرانی به جای بردار از مشتق استفاده کنید. این دو در واقع دو روی یک سکه‌اند! در جلسات بعدی به کارایی این نکته پی خواهید برد.

نکتهٔ نهایی: اگر این مطالب بدیهی بود نیازی به حضور شما در کلاس و حلِ تمرین نبود، پس سوال بپرسید.

موفق باشید. شجاعی