باسمه تعالی

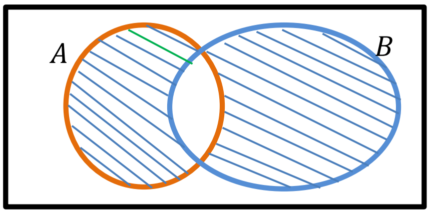
تمرین‌های هفتهٔ دوم درس نسبیت نام و نام خانوادگی: مهلت تحویل: ۰۲/اسفند/۱۳۹۴

نمرهٔ تمرین‌ها بر اساس نوع نگاه شما به مسئله و چگونگی حل آن متغیر خواهد بود. کم‌ترین نمره به پاسخ‌های اصطلاحاً Copy-paste ای اختصاص می‌یابد!

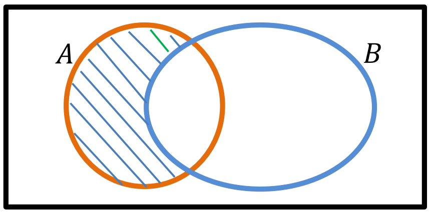
۱- در نظریهٔ مجموعه‌ها، **تفاضل متقارن** دو مجموعه A و B که با نماد $A\Delta B$ به نمایش درمی‌آید، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\Delta B \coloneqq (A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

که در آن $A\backslash B=\{x\in A|x\notin B\}$ تفاضل دو مجموعهٔ A و B است.



نمودار وِن $A\Delta B$



نمودار وِن $A\backslash B$

حال فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعهٔ توانی آن (مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های X) باشد.

الف) آیا رابطهٔ Δ روی $P(X)$ یک عمل دوتایی است؟ به عبارت دیگر آیا $(P(X),\Delta)$ گروه‌واره است؟

ب) تحقیق کنید آیا رابطهٔ زیر برقرار است؟ به عبارت دیگر آیا رابطهٔ Δ روی $P(X)$ شرکت‌پذیر است؟ آیا $(P(X),\Delta)$ نیم‌گروه است؟

$$\forall A,B,C\in P(X)\qquad (A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$$

پ) آیا عضوی مانند E در $P(X)$ وجود دارد که $E\Delta A=A\Delta E=A\quad \forall A\in P(X)$ ؟ به عبارت دیگر آیا $(P(X),\Delta)$ دارای عضو همانی است؟ آیا $(P(X),\Delta)$ تک‌واره است؟

ت) آیا هر $A\in P(X)$ در $(P(X),\Delta)$ عضو وارون دارد؟ آیا $(P(X),\Delta)$ گروه است؟

ث) آیا $(P(X),\Delta)$ گروه آبلی است؟

ج) حال مشخص کنید $(P(X),\cap)$ کدام یک از عناوین گروه‌واره، نیم‌گروه، تک‌واره، گروه و گروه آبلی را به خود می‌گیرد؟ برای قبول یا رد هر یک دلیل بیاورید.

چ) بررسی کنید آیا عمل $\cap$ روی عمل Δ از چپ و راست پخش می‌شود؟ به بیان دیگر آیا روابط زیر برقرارند؟

$$\forall A,B,C\in P(X)\quad ;\quad A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

$$\forall A,B,C\in P(X)\quad ;\quad (A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

ادعا: $(P(X), \Delta, \cap)$ حلقه است.

ح) برای ادعای فوق دلیل بیاورید.

خ) آیا این حلقه یک‌دار است؟ آیا حلقهٔ تقسیم است؟

د) آیا $(P(X), \Delta, \cap)$ میدان است؟

۲- فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ و $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{a,c,f\}, \{b,c,d,e,f\}\} \subset P(X)$.

الف) بررسی کنید آیا هر اجتماع دلخواه از مجموعه‌های عضو τ، عضو τ است؟

ب) بررسی کنید آیا هر اشتراک دلخواه از مجموعه‌های عضو τ، عضو τ است؟ دقت کنید در اینجا باید اشتراک متناهی بررسی شود اما چون تعداد اعضای τ متناهی است تفاوتی میان اشتراک دلخواه و اشتراک متناهی وجود ندارد.

پ) **حداقل** چند زیرمجموعه از X باید به τ اضافه شود که (X, τ) فضای توپولوژیک شود؟ این توپولوژی را به طور کامل با اعضایش مشخص کنید.

ت) بر اساس توپولوژی‌ای که در قسمت (پ) به دست آوردید مشخص کنید هر یک از مجموعه‌های $\{a,e\}$، $\{c,f\}$ و $\{a\}$ «باز»، «بسته»، «هم باز و هم بسته» یا «نه بسته و نه باز» هستند؟

۳- فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد حقیقی باشد.

الف) ثابت کنید گردایهٔ زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ یک توپولوژی روی $\mathbb{R}$ است:

τ شامل مجموعه‌های X و $\emptyset$ و همهٔ بازه‌های به فرم $[n, \infty)$ است که در آن n عدد صحیح است.

ب) چرا در این توپولوژی مجموعهٔ $(-\infty, 0)$ بسته است؟

پ) حال مجموعهٔ $\mathbb{R}$ را با توپولوژی استاندارد که از دبیرستان با آن آشنا بوده‌اید و در کلاس هم معرفی شد در نظر بگیرید. چرا در توپولوژی استاندارد مجموعهٔ $(-\infty, 0)$ باز است؟

نکته بسیار مهم: اگر روزی کسی از شما پرسید آیا بازهٔ $(-\infty, 0)$ روی $\mathbb{R}$ باز است یا خیر، اولین سوالی که از او باید بپرسید این است که با کدام توپولوژی؟ دقت کنید مجموعهٔ $\mathbb{R}$ به تنهایی فقط و فقط مشتی نقطه است و هیچ ساختاری ندارد، آن‌چه به آن ماهیت توپولوژیکی می‌دهد توپولوژی‌ای است که روی آن تعریف می‌شود.

**** **سوال امتیازی:** فرض کنید R رابطه‌ای از X به X باشد (زیرمجموعه‌ای از $X \times X$). وقتی $(x, y) \in R$ باشد، می‌نویسیم xRy. تعاریف زیر که در کلاس هم معرفی شده‌اند را در نظر بگیرید:

الف) R را بازتابی گوییم: اگر $x \in X$ آنگاه xRx.

ب) R را متقارن گوییم: اگر xRy آنگاه yRx.

پ) R را تراگذار گوییم: اگر xRy و yRz آنگاه xRz.

اشکال استدلال زیر را بیابید:

اگر رابطهٔ R یک رابطه متقارن و تراگذار فرض شود در (پ) به جای z قرار دهید x آنگاه با توجه به (ب) از xRy نتیجه می‌شود xRx، یعنی R بازتابی است. به عبارت دیگر از (ب) و (پ)، (الف) نتیجه می‌شود.

موفق باشید. شجاعی