باسمه تعالی

تمرین‌های هفتهٔ اول درس نسبیت

نام و نام خانوادگی:

مهلت تحویل: ۲۵/بهمن/۱۳۹۴

پیش از شروع به حلِ تمرین‌های هفته اول به نکات زیر توجه کنید:

نکته مهم ۱ : آموختن مطالب ریاضی و فیزیک و کسب مهارت در آن بدون حل تمرین‌های آن میسر نیست. توصیه می‌کنم حتماً **خودتان** به اندازه کافی برای فهم و حلِ تمرین‌ها وقت صرف کنید و ذهن ریاضی خود را پرورش دهید. اگر پس از آن همچنان مشکلی وجود داشت در ساعات مشخص شده به دفتر بنده مراجعه کنید. هیچ‌گاه اجازه ندهید مسئله‌ای در ذهنتان حل نشده باقی بماند.

نکته مهم ۲ : نمرهٔ تمرین‌ها بر اساس نوع نگاه شما به مسئله و چگونگی حل آن متغیر خواهد بود. بنابراین تکنیک آشنای Copy-paste را فراموش و سعی کنید با مطالعهٔ بیشتر در موضوع مورد نظر و ارائهٔ راه حلی که زاییدهٔ ذهن خودتان است نمرهٔ بیشتری دریافت کنید. (کمترین نمره به پاسخ‌های اصطلاحاً Copy-paste ای اختصاص می‌یابد!) ضمناً حلِ تمرین‌هایی که تعیین می‌شود برای موفقیت در امتحان‌های میان‌ترم و پایان‌ترم بسیار سودبخش خواهد بود.

۱- اگر a و x عضو یک گروه متناهی چون $(G,*)$ باشند آنگاه در جدول کیلی G عضو $a*x$ در سطر مربوط به a واقع است. حال اگر $b \in G$ باشد آنگاه وجود جواب منحصر بفرد معادلهٔ $a*x=b$ ایجاب می‌کند که b دقیقاً یک بار در سطر مربوط به a ظاهر شود. در نتیجه

هر عضو یک گروه متناهی دقیقاً یک بار در هر سطر جدول کیلی ظاهر می‌شود.

به همین ترتیب چون به ازای هر a و b در G، معادلهٔ $y*a=b$ جواب منحصر به فرد دارد، پس

هر عضو یک گروه متناهی دقیقاً یک بار در هر ستون جدول کیلی ظاهر می‌شود.

الف) با توجه به گروه بودن $(G,*)$ دلیل بیاورید که چرا در چند سطر فوق ادعا شده است که معادلات $a*x=b$ و $y*a=b$ دارای جواب منحصر به فرد هستند؟

ب) حال جدول کیلی گروه‌های ۱، ۲ و۳ عضوی به آسانی تعیین می‌شوند. چگونگی یافتن جدول‌های زیر را به کمک مشاهدات فوق توضیح دهید:

$*$	e
e	e

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

ج) با مقایسهٔ این جدول‌ها با جدول‌های کیلی گروه‌های $(\mathbb{Z}_n, \ \oplus_n)$ برای $n = 1,2,3$، یعنی:

$\oplus_1$	0
0	0

$\oplus_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟ در حد یکریختی چند گروه ۱، ۲ و ۳ عضوی وجود دارد؟

حال ببینیم در حالتی که گروه G چهار عضوی باشد چه اتفاقی می‌افتد. فرض کنیم $G = \{e, a, b, c\}$. اگر e را به عنوان عضو همانی در نظر بگیریم، جدول مقدماتی زیر را داریم:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?		
b	b			
c	c			

د) با توجه به مطالبی که از حل بخش‌های پیشین این مسئله آموختید مشخص کنید چه انتخاب‌هایی برای محل ? وجود دارد؟ همچنین با استدلالی مشابه نشان دهید در این مرحله جدول فوق **الزاماً** به سه صورت زیر گسترش می‌یابد:

(۱)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c		
c	c	e		

(۲)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e		
c	c	b		

(۳)

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c		
c	c	b		

هـ) همین روند را ادامه داده و نشان دهید هر یک از جدول‌های (۱) و (۲) تنها به یک صورت و جدول (۳) به دو صورت کامل می‌شوند. این چهار جدول را رسم و بررسی کنید دو جدول باهم و دو جدول دیگر هم با یکدیگر یکریخت هستند، و در واقع دو جدول غیریکریخت باقی می‌ماند. در نهایت نشان دهید یکی از این جدول‌ها با گروه $(\mathbb{Z}_4, \ \oplus_4)$ و دیگری با گروه چهارتایی کلاین K_4 که در کلاس معرفی شد یکریختند.

و) گروه چهارتایی کلاین در واقع گروه تقارن‌های مستطیلی است که مربع نباشد. در مورد این تقارن‌ها و K_4 جستجو کنید و نتایج را در چند سطر به طور خلاصه بنویسید.

جانِ کلام: نتیجه کلی این تمرین را (در مورد تعداد گروه‌های غیر یکریخت ۱، ۲، ۳ و ۴ عضوی) در یک سطر بنویسید.

۲- فرض کنید $(GL(n,\mathbb{R}),.)$ گروه همه ماتریس‌های $n\times n$ وارون‌پذیر با درایه‌های حقیقی به همراه عمل ضرب ماتریسی، $(\mathbb{R}^*,.)$ گروه $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}-\{0\}$ به همراه عمل ضرب اعداد حقیقی، $F(\mathbb{R})$ مجموعهٔ تمام توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ و $Diff(\mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R})$ مجموعه تمام توابع مشتق‌پذیر است.

الف) نشان دهید نگاشت $(GL(n,\mathbb{R}),.) \to (\mathbb{R}^*,.)$ $\phi:$ با تعریف $\phi(A)=\det A$ یک همریختی گروهی است. آیا گروه‌های $(GL(n,\mathbb{R}),.)$ و $(\mathbb{R}^*,.)$ یکریختند؟ چرا؟

ب) آیا همین نگاشت ϕ از $(GL(n,\mathbb{R}),.)$ به گروه جمعی $(\mathbb{R},+)$ یک همریختی است؟ آیا گروه‌های $(GL(n,\mathbb{R}),.)$ و $(\mathbb{R},+)$یکریختند؟

ج) آیا نگاشت مشتق‌گیری از گروه جمعی $Diff(\mathbb{R})$ به گروه جمعی $F(\mathbb{R})$ یک همریختی است؟ آیا گروه‌های $(Diff(\mathbb{R}),+)$ و $(F(\mathbb{R}),+)$ یکریختند؟

۳- (گروه تبدیلات گالیله) این گروه و گروه تبدیلات لورنتس از گروه‌های مهم در فیزیک هستند. برای راحتی کار فرض کنید که فضا یک بعدی است و آن را توسط محور x، و زمان را توسط محور t عمود بر محور x نمایش دهید. فرض کنید دستگاه مختصات دیگری چون (x',t') وجود دارد که با سرعت یکنواخت u به طرف دستگاه مختصات اول حرکت می‌کند. می‌دانید

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-ut \\ t \end{pmatrix}$$

نشان دهید $G=\{g_u | u\in\mathbb{R}\}$ که در آن تابع g_u به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g_u\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-ut \\ t \end{pmatrix}$$

به همراه عمل ترکیب توابع یک گروه است. این گروه، گروه تبدلات گالیله نام دارد.

موفق باشید. شجاعی