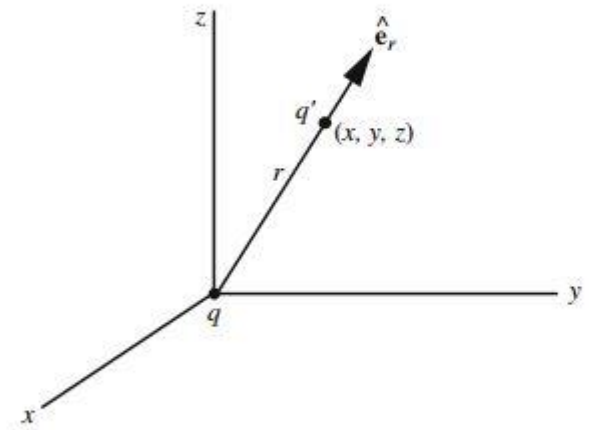
باسمه تعالی

# مسائل سری دوم فیزیک پایه ۱

موعد تحویل:
تا سه‌شنبه ۵ آبان ۹۴

۱- بار نقطه‌ای $q$ در مبدا مختصات و بار نقطه‌ای دومی $q'$ در مختصات $(x, y, z)$ قرار دارد. با توجه بـه اینکـه نیـروی الکتریکی وارد بر بار $q'$ از طرف بار $q$ به صورت $\vec{F}_{q'} = \frac{k_e q q'}{r^2}\ \hat{e}_r$ است، ایـن نیـرو را در دسـتگاه مختصـات دکـارتی، کروی و استوانه‌ای بنویسید.




در این رابطه، $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$، و $\hat{e}_r$ بردار یکه‌ای در راستای خط واصل بین دو بار است.

** جواب آخر در زیر نوشته شده است. بنابراین نوشتن راه حل اجباری است.

جواب آخر:

| کروی | دکارتی | استوانه‌ای |
|---|---|---|
| $\frac{k_e q q'}{r^3}\ \vec{r}$ | $\frac{k_e q q'}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$ | $\frac{k_e q q'}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\ (\rho\hat{\rho} + z\hat{z})$ |

۲- تبدیلات بین بردارهای پایه در سه دستگاه مختلف به صورت زیر است:

$Cartesian \leftrightarrow Cylindrical$

| | |
|---|---|
| $\hat{x} = cos\phi\hat{\rho} - sin\phi\hat{\phi} + 0\hat{z}$ | $\hat{\rho} = cos\phi\hat{x} + sin\phi\hat{y}$ |
| $\hat{y} = sin\phi\hat{\rho} + cos\phi\hat{\phi} + 0\hat{z}$ | $\hat{\phi} = -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y}$ |
| $\hat{z} = 0\hat{\rho} - 0\hat{\phi} + \hat{z}$ | $\hat{z} = \hat{z}$ |

$Cartesian \leftrightarrow Spherical$

| | |
|---|---|
| $\hat{x} = sin\theta cos\phi\hat{r} + cos\theta cos\phi\hat{\theta} - sin\phi\hat{\phi}$ | $\hat{r} = sin\theta cos\phi\hat{x} + sin\theta sin\phi\hat{y} + cos\theta\hat{z}$ |
| $\hat{y} = sin\theta sin\phi\hat{r} + cos\theta sin\phi\hat{\theta} + cos\phi\hat{\phi}$ | $\hat{\theta} = cos\theta cos\phi\hat{x} + cos\theta sin\phi\hat{y} - sin\theta\hat{z}$ |
| $\hat{z} = cos\theta\hat{r} - sin\theta\hat{\theta}$ | $\hat{\phi} = -sin\phi\hat{x} + cos\phi\hat{y}$ |

$Cylindrical \leftrightarrow Spherical$

| | |
|---|---|
| $\hat{\rho} = sin\theta\hat{r} + cos\theta\hat{\theta}$ | $\hat{r} = sin\theta\hat{\rho} + cos\theta\hat{z}$ |
| $\hat{\phi} = \hat{\phi}$ | $\hat{\theta} = cos\theta\hat{\rho} - sin\theta\hat{z}$ |
| $\hat{z} = cos\theta\hat{r} - sin\theta\hat{\theta}$ | $\hat{\phi} = \hat{\phi}$ |

جدول اول را می‌توان با استفاده از ماتریس‌ها به شکل زیر نمایش داد:

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\phi & -sin\phi & 0\\ sin\phi & cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{bmatrix}= \;, \qquad \begin{bmatrix}\hat{\rho}\\ \hat{\phi}\\ \hat{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}cos\phi & sin\phi & 0\\ -sin\phi & cos\phi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\\ \hat{z}\end{bmatrix}$$

این ماتریس‌ها در اصطلاح *ماتریس تبدیل مختصات* نام دارند.

الف) با به کار گیری ضرب ماتریسی، تساوی جدول اول و نمایش ماتریسی آن را تأیید کنید.

ب) دو جدول دیگر را به صورت ماتریسی بنویسید.

۳- سوال ۱ را با استفاده از ماتریس‌های تبدیل دوباره حل کنید.

۴- بردار مکان $\vec{V}=v\hat{r}$ را در دستگاه مختصات کروی فرض کنید. مشتق این بردار نسبت به پارامتر دلخواه $\lambda$ به صورت

$$\frac{d}{d\lambda}\vec{V}=\frac{dv}{d\lambda}\hat{r}+v\frac{d\hat{r}}{d\lambda}$$

محاسبه می‌شود. با فرض اینکه بردارهای پایه دستگاه مختصات دکارتی نسبت به هر پارامتری ثابت هستند، (به عنوان مثال $\frac{d\hat{x}}{d\lambda}=0$ برای هر $\lambda$ دلخواه)، نشان دهید:

الف) $\frac{d\hat{r}}{dr}=0$ و $\frac{d\hat{\theta}}{dr}=0$ و $\frac{d\hat{\phi}}{dr}=0$

ب) $\frac{d\hat{r}}{d\theta}=\hat{\theta}$ و $\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}=\hat{r}$ و $\frac{d\hat{\phi}}{d\theta}=0$

پ) $\frac{d\hat{r}}{d\phi}=sin\theta\hat{\phi}$ و $\frac{d\hat{\theta}}{d\phi}=cos\theta\hat{\phi}$ و $\frac{d\hat{\phi}}{d\phi}=-sin\theta\hat{r}-cos\theta\hat{\theta}$

ت) درستی روابط قسمت‌های قبل را تا جایی که می‌توانید با استفاده از رسم شکل نشان دهید.

۵- با استفاده از جواب‌های سوال قبل، و با توجه به $\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d\vec{V}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}$، مشتق‌های الف) $\frac{d\hat{r}}{dt}$، ب) $\frac{d\hat{\theta}}{dt}$، پ) $\frac{d\hat{\phi}}{dt}$ را محاسبه کنید.

موفق باشید

فاطمه مهدیه