

۱- طبق تعریف، چگالی بحرانی، ρ_c ، مقدار چگالی است که هندسه (قسمت فضایی) عالم را تخت نگاه می‌دارد. مقدار این چگالی را برای زمان حاضر حساب کنید. اگر چگالی واقعی عالم بیشتر یا کمتر از مقدار بحرانی باشد، هندسه مناظر آن چگونه خواهد بود؟ نسبت $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ را چگالی نسبی یک نوع ماده می‌گویند. فرض کنید ماده غالب تشکیل دهنده عالم در تمام طول عمرش از مهپانگ تاکنون غبار، یعنی $\omega = 0$ ، بوده باشد. تابعیت $|\Omega - 1|$ را نسبت به زمان حساب کنید. نشان دهید که اگر عالم در زمان حاضر تقریباً تخت باشد، (مثلاً فرض کنید با خطای کمتر از 10 درصد تخت باشد)، آنگاه در زمان پلانک این مقدار باید بسیار نزدیک به تخت باشد. این مسئله، به مسئله تختی (flatness problem) معروف است.

۲- با توجه به عمر عالم، نشان دهید همه نقاط عالم (برای مثال دو نقطه‌ای که در افق دید شما مقابل هم قرار دارند) فرصت برقراری ارتباط با هم را نداشته‌اند. با این حال همه عالم (از نظر تعداد کهکشان و دمای تابشی آن) مشابه دیده می‌شود. به این مسئله، مسئله افق (horizon problem) گفته می‌شود.

۳- رفتار عالمی را که صرفاً با انرژی تاریک پر شده باشد برحسب نوع هندسه‌اش بطور کامل بررسی کنید. نمودارهای ضریب مقیاس بر حسب زمان را رسم کنید.

۴- با اعمال تبدیلاتی مناسب نشان دهید که می‌توان متریک رابرتسون-واکر را برحسب مختصات دکارتی به شکل

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2 + z^2)\right)^2}$$

(نکته: به این راحتیها نیست!)

۵- نشان دهید که اگر $\rho + 3p/c^2 \geq 0$ آنگاه زمانی بوده است که $a(t) = 0$.

۶- درباره فضای دوسپته (de-sitter) و آنتی دوسپته (anti-de-sitter) تحقیق و بررسی کنید.

۷- نشان دهید در عالم حالت-مانا (steady-state) که با وجود انبساط، چگالی ماده درون آن ثابت می‌ماند، ماده باید با نرخ تقریبی $7 \times 10^{-44} \text{ kg/m}^3/\text{s}$ تولید شود. این مقدار معادل چند اتم هیدروژن در کیلومتر مکعب در یک سال است؟ حساب کنید چقدر زمان می‌برد تا در حجمی برابر با یک سال نوری مکعب، جرمی برابر با جرم ماه ایجاد شود؟ این عدد اخیر چه نسبتی با عمر عالم (در مدل استاندارد مهپانگ فعلی) دارد؟ چگالی عالم را برابر با 10^{-26} kg/m^3 در نظر بگیرید.

۸- حجم ابرسطح کره‌ای سه بعدی به شعاع r را حساب کنید.

۹- نشان دهید در حالت کلی، عمر عالم از رابطه $T = \int_0^1 \frac{da}{H_0[\Omega_r a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 + (1 - \Omega_r - \Omega_m - \Omega_\Lambda)]^{1/2}}$ بدست می‌آید که در آن Ω_r ، Ω_m و Ω_Λ به ترتیب چگالیهای نسبی تابش، ماده (غیرنسبیتی) و انرژی تاریک در زمان حاضر هستند.

۱۰- ثابت کنید هر جا خلأ باشد، در آن نقطه تانسور و اسکالر ریچی صفر هستند. توضیح دهید چرا می‌گویند که تانسور وایل خواص فراگیر (global) گرانش را منعکس می‌کند.

۱۱- ضرایب همبستار متریکی (metric connection) متریک رابرتسون-واکر، $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$ ، را بدست آورید. مؤلفه‌های تانسور ریمان و ریچی را حساب کنید. اسکالر ریچی را بدست آورید. مؤلفه‌های تانسور اینشتین را محاسبه نمایید.

۱۲- راه دیگر بدست آوردن معادله (اول) فریدمان و معادله سیال، استفاده از روش وردشی است. با فرض متریک رابرتسون-واکر (مشابه سؤال فوق)، بازنویسی لاگرانژی $S = \int dx^4 \sqrt{-g} (R - 2\Lambda + \kappa L_m)$ (که در آن Λ یک ثابت است)، و استفاده از روش وردشی معادلات ذکر شده را بدست آورید. بنظر شما کدام روش برای بدست آوردن معادلات اینشتین مناسب‌تر است، روش سینماتیکی (مسئله قبل) یا روش دینامیکی (این مسئله)؟ چرا؟